27/10/15

Ακολουθίες (στον $\mathbb{R}^n$)

$$\overline{X}_\nu = \left(X_\nu^{(1)}, \ldots, X_\nu^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n, \ \nu \in \mathbb{N}$$

$$\left(\underset{\in \mathbb{N}}{\nu} \longrightarrow \underset{\in \mathbb{R}^n}{\overline{X}_\nu}\right)$$

Για $\eta = 2$: $(X_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}^2, \ \nu \in \mathbb{N}$

$\eta = 3$: $(X_\nu, y_\nu, z_\nu) \in \mathbb{R}^3, \ \nu \in \mathbb{N}$

$$\overline{X}_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \overline{X}_0 \in \mathbb{R}^n : \Longleftrightarrow \underbrace{\|\overline{X}_\nu - \overline{X}_0\|}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

Ορισμός: Μια ακολουθία $(\overline{X}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\overline{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν η απόσταση των όρων της ακολουθίας από το $\overline{X}_0$ τείνει στο 0.

[Είπαμε ότι συμβολίζουμε με $(\overline{X}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ την απεικόνιση $\nu \longmapsto \overline{X}_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.
Άρα ο συμβολισμός $(\overline{X}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ δεν έχει νόημα, <u>εκτός αν συμφωνήσουμε</u> ότι μπορούμε να δούμε το $(\overline{X}_\nu)$ και ως εικόνα της απεικόνισης, δηλαδή $(\overline{X}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} = \{\overline{X}_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$]

Παράδειγμα: Οι ακολουθίες $(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathbb{N}$, με:

- $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, 0\right)$ • $(x_\nu, y_\nu) = \left(0, \frac{1}{\nu^2}\right)$
- $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$ • $(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}, \frac{1}{\nu^{27}}\right)$
- $(x_\nu, y_\nu) = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right), e^{-\nu}\right)$ κλπ όλες συγκλίνουν

στο $(0,0)$, εξετάζοντας τα x_ν, y_ν ως ακολουθίες του $\mathbb{R}$.

$$\|(x_\nu, y_\nu) - (x_0, y_0)\| = \|(x_\nu, y_\nu) - (0,0)\| = \|(x_\nu, y_\nu)\|$$

$$= \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \iff \underbrace{x_\nu^2 + y_\nu^2}_{\|(x_\nu, y_\nu)\|^2} \longrightarrow 0,$$

με το τελευταίο να ισχύει, αφού για όλες τις ακολουθίες $(x_\nu) \subset \mathbb{R}$, $(y_\nu) \subset \mathbb{R}$ ισχύει $x_\nu \to 0$, $y_\nu \to 0$

Δηλαδή είδαμε ότι $x_\nu \to 0$, $y_\nu \to 0 \Rightarrow \underbrace{x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0}$

$$\iff \|(x_\nu, y_\nu) - (0,0)\| \to 0 \overset{}{\underset{\text{ορισμός}}{\iff}} (x_\nu, y_\nu) \to (0,0).$$

Από την άλλη ισχύει και:

$$x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow x_\nu \to 0 \text{ και } y_\nu \to 0$$

[αφού $0 \le x_\nu^2 \le x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow x_\nu^2 \to 0$
$\Rightarrow |x_\nu| \to 0 \Leftrightarrow x_\nu \to 0$
Ομοίως $y_\nu \to 0$] Θεώρημα ισοσυγκλινουσών

Άρα αποδείξαμε ότι $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \Leftrightarrow x_\nu \to 0,\ y_\nu \to 0$
Αυτό γενικεύεται σε κάθε διάσταση (Β). πρόταση αρχόκτ.
και ισχύει για κάθε όριο (x_0, y_0), θεωρώντας την ακολουθία $(x_\nu, y_\nu) - (x_0, y_0) \longrightarrow (0,0)$.

Παράδειγμα: Η ακολουθία $(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}\sin\nu, \frac{1}{\nu}\cos\nu, 1 - \frac{1}{\nu}\right), \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο $(0,0,1)$, αφού $\|(x_\nu, y_\nu, z_\nu) - (0,0,1)\| \to 0$

Είναι:

$$\|(x_\nu, y_\nu, z_\nu - 1)\| = \left\|\frac{1}{\nu}\sin\nu, \frac{1}{\nu}\cos\nu, -\frac{1}{\nu}\right\|$$

$$= \frac{1}{\nu}\|\sin\nu, \cos\nu, -1\| = \frac{1}{\nu}\sqrt{\underbrace{\sin^2\nu + \cos^2\nu}_{1} + (-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\nu}$$

$$\xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0.$$

Άρα έχουμε δύο χαρακτηρισμούς $\sqrt{}$ ισοδύναμους (μέχρι τώρα) για $\bar{X}_\nu \longrightarrow \bar{X}_0$

- $\|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| \to 0 \quad (*)$
- $\bar{X}_\nu - \bar{X}_0 = \bar{y}_\nu \to 0 \quad \left[\|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| \to 0 \iff \|(\bar{X}_\nu - \bar{X}_0) - \bar{0}\| \to 0 \underset{\text{ορισμός}}{\iff} \bar{X}_\nu - \bar{X}_0 \to 0 \right]$

Υπάρχει άμεσα και άλλος ένας μέσω της $(*)$, δηλαδή $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0 : \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| < \varepsilon \iff \bar{X}_\nu \in B(\bar{X}_0, \varepsilon)$.

Ο τελευταίος χαρακτηρισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε κάποια (τετριμμένα) αποτελέσματα όπως στο $\mathbb{R}$ (αφού η Ευκλείδια νόρμα στον $\mathbb{R}$, είναι η απόλυτη τιμή).

$$\left[\bar{X} = (X_1) \in \mathbb{R}^1 \text{ και } \|\bar{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{1} X_i^2} = \sqrt{X_1^2} = |X_1| \right.$$

Πρόταση: Μια συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη

$(\bar{X}_\nu) \in \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη $\iff \exists M > 0 : \|\bar{X}_\nu\| \leq M,$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Αποδ

$\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0 \iff \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0$

$\|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| < \varepsilon \underset{\varepsilon = 1}{\Longrightarrow} \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0 \ \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| < 1$

$\Rightarrow \forall \overset{\nu \geq \nu_0}{\nu \in \mathbb{N}}, \ \|\bar{X}_\nu\| < 1 + \|\bar{X}_0\|$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \|\bar{X}_\nu\| \leq \max\{\|\bar{X}_1\|, \dots, \|\bar{X}_{\nu_0 - 1}\|, 1 + \|\bar{X}_0\|\}$

Ο σημαντικότερος (και για τη θεωρία και για την πράξη) χαρακτηρισμός σύγκλισης ακολουθίας στον $\mathbb{R}^n$, είναι ο εξής:

Πρόταση: Έστω $\bar{X}_\nu = (X_\nu^{(1)}, \dots, X_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n, \ \nu \in \mathbb{N},$

$\bar{X}_0 = (X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$

Τότε $\bar{X}_\nu \to \bar{X}_0 \iff \left.\begin{array}{l} X_\nu^{(1)} \to X_0^{(1)} \\ \vdots \\ X_\nu^{(n)} \to X_0^{(n)} \end{array}\right\}$ Δηλαδή η $(\bar{X}_\nu)$ συγκλίνει στο διάνυσμα με συνιστώσες τα όρια των συνιστωσών της $(\bar{X}_\nu)$

* Άσκηση

(Βρείτε διάφορες συγκλίνουσες ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ και κατασκευάστε συγκλίνουσες στον $\mathbb{R}^n$).

Παρένθεση: Εκτός από την Ευκλείδια νόρμα $\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

για $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, υπάρχουν άπειρες άλλες νόρμες στον $\mathbb{R}^n$

δηλαδή απεικονίσεις $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με

$\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \|\bar{x}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|, \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

- Νόρμα μεγίστου ή ∞ - άπειρο. (Να δειχθεί ότι η ∞ - άπειρο είναι νόρμα)

$$\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

- 1 - νόρμα (Να δειχθεί ότι η 1 - νόρμα είναι νόρμα)

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(Η Ευκλείδια νόρμα (ή 2-νόρμα) και η 1-νόρμα είναι περιπτώσεις της p-νόρμας ($p \geq 1$), με p-νόρμα

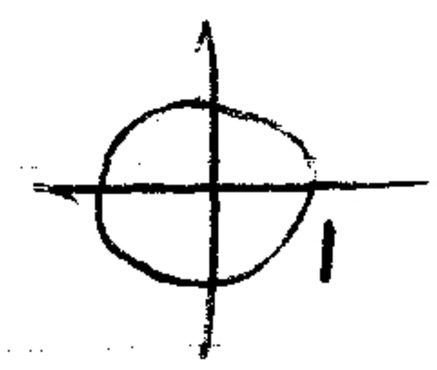
$$\|\bar{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Ορισμός Δυο νόρμες $\|\bar{x}\|_\alpha$, $\|\bar{x}\|_\beta$ λέγονται ισοδύναμες, αν

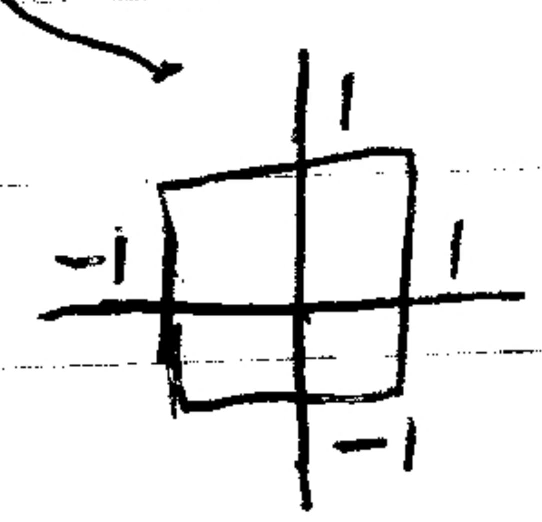
$$c\|\bar{x}\|_\alpha \le \|\bar{x}\|_\beta \le C\|\bar{x}\|_\alpha, \quad \text{όπου } c, C > 0, \ \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

Πρόταση Οι νόρμες $\|\bar{x}\|_1$, $\|\bar{x}\|$, $\|\bar{x}\|_\infty$ είναι ανά δυο ισοδύναμες.

$\underline{n=2}$ $\quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \iff x^2+y^2 = 1$

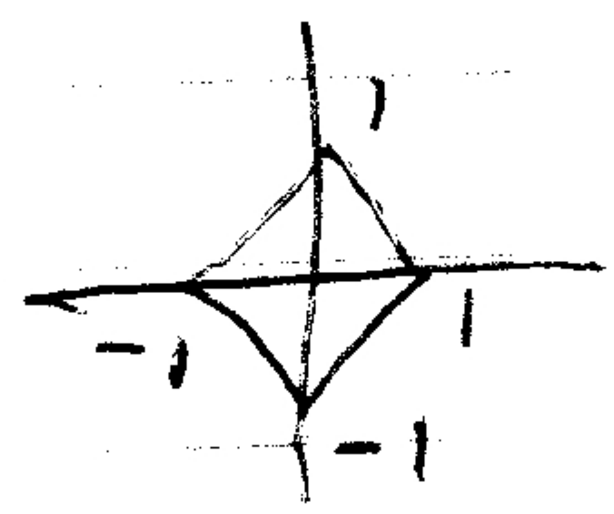


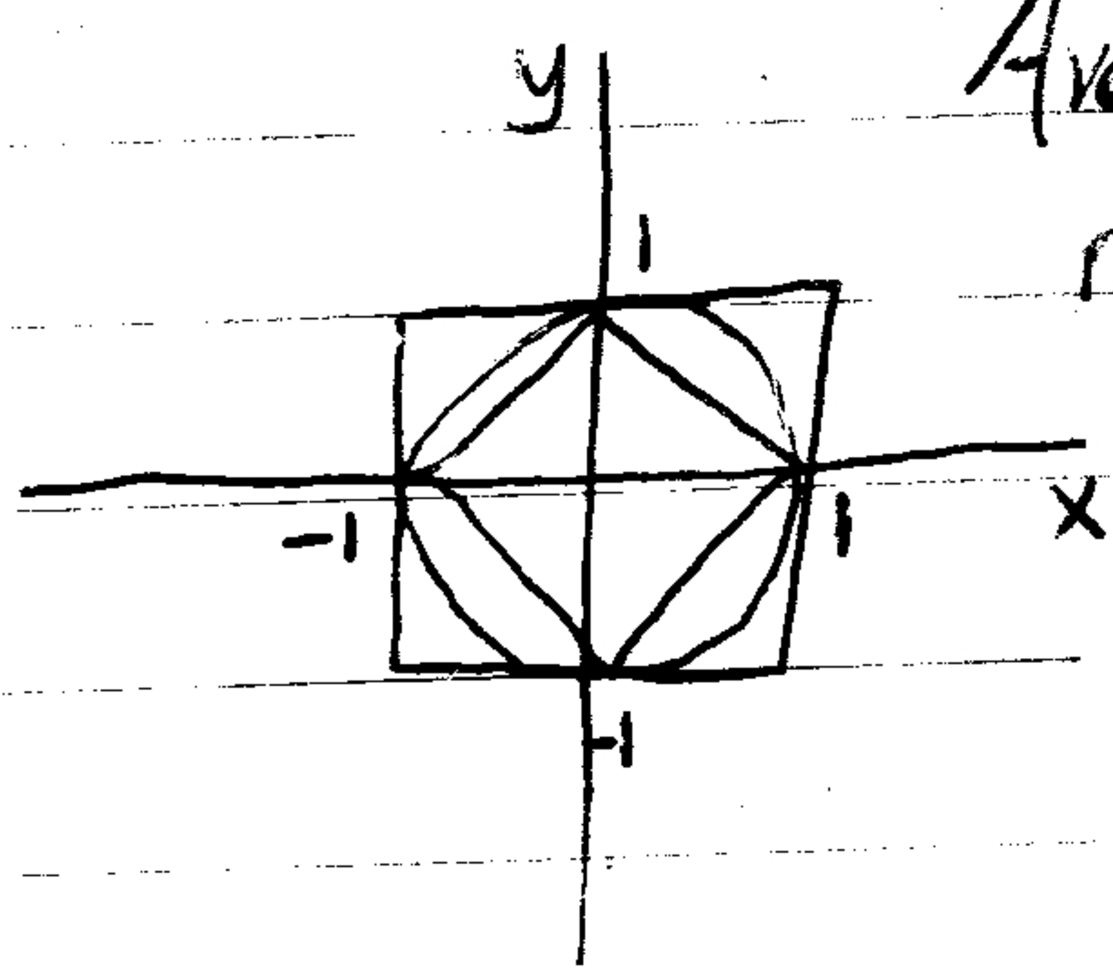
$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\} = 1$$



$\sim \|(x,y)\|_\infty = 1$

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y| = 1$$





Αναπαράσταση των παραπάνω σε κοινό σ. αξόνων.

Ισχύουν:

$$\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_1 \leq n\|\bar{x}\|_\infty$$

$$\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\| \leq \sqrt{n}\,\|\bar{x}\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}\|_1 \leq n\|\bar{x}\|$$